中学数学で求める正多面体の体積

地蔵菩薩

2005 年 9 月 23 日

目次

0　前書き

このテキストは今から 20 年以上前に，私が某進学塾に勤めていたときに書いたものです。

公立の学校と違って，好きなことをやらせてもらえました。もっとも，このテキストを使って授業をしたわけではありませんが，家庭学習の教材として挑戦するように求めました。受験問題の演習だけでは偏るので，ちょっと真面目に数学してみようという趣旨のテキストです。

ですから，第 2 章は一度終わらせた証明を再度やりなおしてみたり,「合理的に無駄なく」といった受験数学とは違う雰囲気を楽しんでもらおうと意識したものです。

第 3 章が本テキストの眼目で，中学数学の知識を総動員して 5 種類の正多面体の体積を求めます。正多面体の体積は一つの式で表すこともできますが，(ここでも非合理的に) 一つ一つの立体の特徴を使って求めていきます。基本的に中学生のためのテキストですから，取り組むことで立体図形の難問に挑戦する技術や考え方を身に付けてもらうわけです。

おまけに入試問題から立体図形の問題を選んでおきました。いずれも 20 年たった今でも充分新しい良問ぞろいです。

1　準備

1.1　正多角形

例題 1.1.1　正 p 角形の 1 つの内角，外角を p を用いて表せ。

三角形の内角の和は 180 ° である。(⇒演習)

正 p 角形は図 1 のように $(p-2)$ 個の三角形に分割されるから，正 p 角形の内角の和は $180(p-2)$(度) となる。したがって 1 つの内角は $\boldsymbol{\dfrac{180(p-2)}{p}}$(度) とわかる。

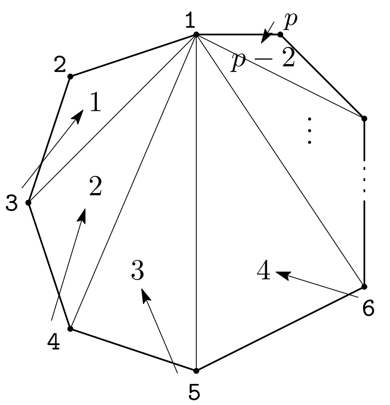

図 1　p 角形の内角の和

これより外角は

$$
\begin{aligned}
180-(\text{内角}) &= 180-\frac{180(p-2)}{p} \\
&= \frac{180p-180(p-2)}{p} \\
&= \frac{180p-180p+360)}{p} \\
&= \boldsymbol{\frac{360}{p}}(\text{度})
\end{aligned}
$$

この結果は正 p 角形の外角の和は 360 度であることを物語っている。

演習 1　三角形の内角の和が 180 ° であることを証明せよ。

演習 2　上において「正 p 角形」の「正」という家庭を用いたのは，1 つの内角を求めるために p で割ったところである。それ以外には使っていない。

それならば「一般の p 角形において，内角の和は $180(p-2)$ 度，外角の和は 360 度である」という主張が成立するのかどうか調べよ。

例題 1.1.2　1 辺 a の正三角形の面積を求めよ。

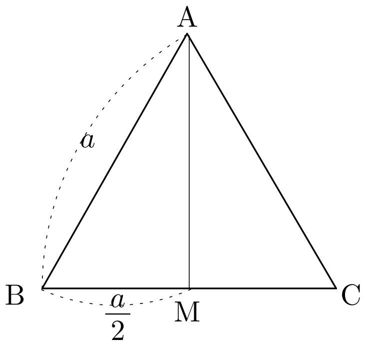

図 2　正三角形の面積

BC の中点を M とし，AM を結ぶと BM=$\frac{a}{2}$，AM⊥BC

△ABC において三平方の定理より

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 - BM^2 \\ &= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}a^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{AM} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \qquad (\because\ a > 0)$$

したがって

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2} \times BC \times AM \\ &= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}a^2 \end{aligned}$$

正三角形の面積はこれから再三求めることになるので，公式として以下の章で活用する。

補足

上の解法において a が計算中に多く現れるが，本質的な計算はその係数に関してのみだということに気づかれたかと思う。その理由は次の定理を理解していれば納得できるはずである。

面積比 = (相似比)^2
体積比 = (相似比)^3

△ABC ∽ △PQR とし, BC=a, QR=1 とすると，相似比は $a : 1$ であるから，面積比 $S_a : S_1 = a^2 : 1$

すなわち $S_a = S_1 a^2$

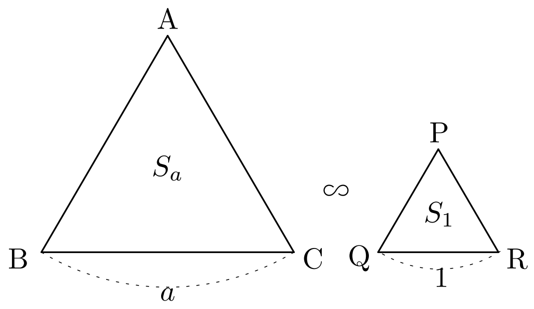

図 3　相似比と面積比の活用

つまり 1 辺 a の (三角形の) 面積を求めるには，1 辺 1 として求めた値に a^2 をかければ良いということがわかる。

同様に 1 辺 a の図形の体積を求めるには，1 辺 1 として求めて a^3 をかければ良い。

この考え方をさらに応用して例題 1.1.2 を次のように解くこともできる。

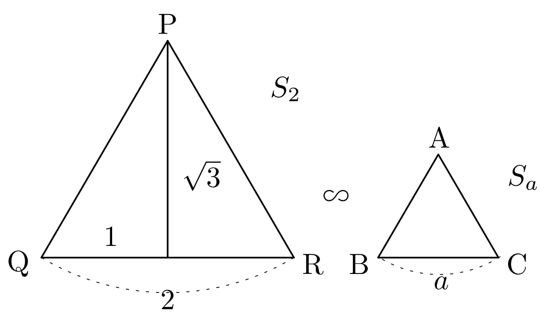

図 4　相似比と面積比の活用 2

1 辺 2 の正三角形の面積は

$S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$S_a : S_2 = a^2 : 2^2 = a^2 : 4$

したがって，$S_a = \frac{a^2}{4} \times S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

分数を使わずに計算することでミスを減ら

すようにするわけである。

演習 3 1 辺 a の正六角形の面積を求めよ。

例題 1.1.3 1 辺 a の正五角形 ABCDE の対角線 AC の長さを求めよ。

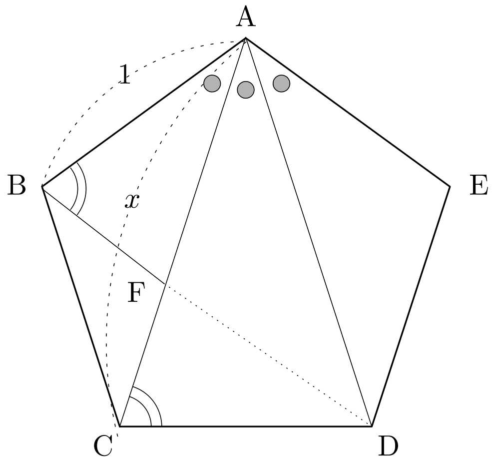

図 5 正五角形

1 辺 1 の正五角形 ABCDE を考える。

AC と BD の交点を F とする。

正 p 角形は円周の p 等分点を結んだ図形と考えられるから，円周角の定理を活用すれば実際に角度を計算するまでもなく

$\triangle$ABF$\backsim\triangle$ACD ……………………(1)

$\triangle$ABF $\equiv \triangle$DCF ……………………(2)

等々は明らかである。

(1) より，AB : BF = AC : CD

ここで，AB = CD = 1,

BF = BD−DF = $x-1$（(2) より）であるから，$1 : x-1 = x : 1$

これを解くと，$x(x-1) = 1$

整理すると $x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{5} \fallingdotseq 2.236$ なので $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

したがって　AC=$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

これより，1 辺 a の場合は AC=$\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a}$

演習 4 AB=AC=a, $\angle$BAC=36° である $\triangle$ABC がある。BC の長さを求めよ。

演習 5 例題 1.1.3 で求めた AB:AC = 2 : $1+\sqrt{5}$ は黄金比と呼ばれている。ところで，黄金比の本来の定義は「AB <AD である長方形 ABCD について，1 辺 AB の正方形を切り抜くとき, 残った長方形と元の ABCD が相似であるような AB と AD の比」といったものである。この定義に基づいて黄金比を求めよ。

演習 6 ついでであるが，紙の大きさの規格は A,B の 2 種類があるが，いずれも長方形の長い辺の中点を結んだ直線で 2 つ折りにしてできる面積 1/2 の長方形が元の長方形と相似であるようにできている。この長方形の長辺と短辺の比を求めよ。

2　正多面体の数と種類

正多角形とはすべての辺の長さ，角の大きさが等しい平面図形であった。これを立体図形に拡張したのが正多面体である。すなわり，すべての面が合同な正多角形で，すべての頂点が合同な立体図形であるといえる。頂点が合同というのは，ある頂点に p 本の辺が集まるとすると，隣り合う p 個の頂点を通る平面で切断してできる正 p 角錐が合同であるという意味に理解しておいて欲しい。

正多角形は無限に存在するが，正多面体は有限個しか存在しない[*1]。

本章ではこのことを証明するのが主題である。手始めに「タイル貼りの問題」に取り組んでもらう。

2.1　平面を埋めつくす正多角形

例題 2.1.1　平面に合同な正 p 角形をすきまなく敷き詰める。このようなことのできる p をすべて求めよ。ただし，正 p 角形の頂点は必ず隣の正 p 角形の頂点と一致するように並べること。

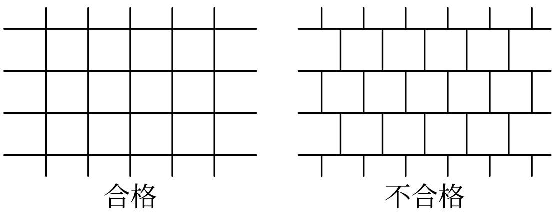

図 6　平面の敷き詰め

例題 1.1.1 より 1 つの内角は $\dfrac{180(p-2)}{p}$ 度だから

$$\frac{180(p-2)}{p} \times q = 360 \quad \cdots\cdots (1)$$

が成立することが必要である。整理すると，

$$\frac{(p-2)q}{p} = 2$$
$$(p-2)q = 2p$$
$$pq - 2q = 2p$$

$$pq - 2p - 2q = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

この (2) 式を解くことを考えよう。未知数は p，q と 2 つあるが方程式は 1 つしかない。したがって解は無数にあるのではないかと思われる。しかし，p，q にはともに自然数という条件がある。さらによく考えると p も q も 3 以上だ。この条件のおかげで，1 つしかない方程式から有限個の解を導くことができる。

(2) を，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} \cdots\cdots (3)$

と変形するのも有力だが，今回は中学生向きに因数分解を利用して 2 次方程式の解法と類似の方法で解いてみよう。

(2) の両辺に 4 を加えることによって，左辺が因数分解できるようになる。

$$pq - 2p - 2q + 4 = 4$$
$$(p-2)(q-2) = 4 \quad \cdots\cdots (4)$$

p, q は 3 以上の自然数であったから，$(p-2)$，$(q-2)$ はともに自然数であるとわかる。（自然数）×（自然数）＝ 4 というのは，1×4，2×2，4×1 の 3 通りの組み合わせしかない。

つまり

$$\begin{cases} p-2=1 \\ q-2=4 \end{cases}, \begin{cases} p-2=2 \\ q-2=2 \end{cases}, \begin{cases} p-2=4 \\ q-2=1 \end{cases}$$

の 3 通りである。

これから

$$\begin{cases} p=3 \\ q=6 \end{cases}, \begin{cases} p=4 \\ q=4 \end{cases}, \begin{cases} p=3 \\ q=3 \end{cases}$$

の 3 つの解が得られる。

$(p, q) = (3, 6)$ とは正三角形が 1 つの頂点の周りに 6 個集まるという意味であるから図 7 のようになる。

(4,4)，(6,3) いずれも実際に可能なことは図からわかる。結局例題 2.1.1 の答は **3 ，4 ，6** であるといえる。

[*1] もちろん，相似なものは同じものと考えてである。

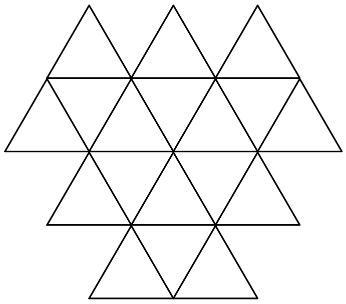

図 7　(3,6) の敷詰め

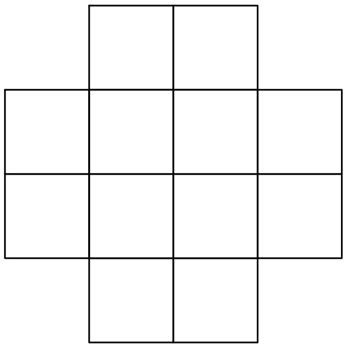

図 8　(4,4) の敷詰め

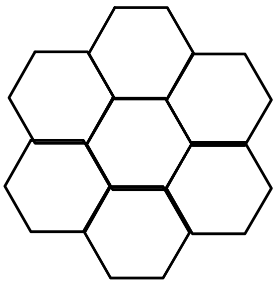

図 9　(6,3) の敷詰め

演習 7　x，y が自然数であるとき，
$xy + x - 2y - 8 = 0$ を解け

演習 8　x，y，z が自然数であるとき，
$\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{z} = 2$ を解け。

2.2　5 種類の正多面体

例題 2.2.1　正多面体は 5 種類以下しか存在しないことを証明せよ。

例題 2.1.1 と同様に，正 p 角形が 1 つの頂点の周りに q 個集まっているとして考える。

例題 2.1.1 では内角の q 個の和がちょうど 360 度になった。本題では立体になるのだから，360 度未満になる必要がある[*2]。

つまり，方程式は例題 2.1.1 の (1) を少し変更して次のようにすればよい。

$$\frac{180(p-2)}{p} \times q < 360 \quad \cdots\cdots (5)$$

以下も同様の変形で (3) にあたるものとして，

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots (6)$$

(4) にあたるものとして

$$(p-2)(q-2) < 4 \quad \cdots\cdots (7)$$

が得られる。この (7) を解けばよいわけである。左辺が (自然数)×(自然数) であったことを思い出せば，4 未満といえば 1,2,3 しかないことに思い至る。つまり次の 3 つの方程式をそれぞれ解けばよいのである。

$$(p-2)(q-2) = 1 \quad \cdots\cdots (8)$$

$$(p-2)(q-2) = 2 \quad \cdots\cdots (9)$$

$$(p-2)(q-2) = 3 \quad \cdots\cdots (10)$$

これらを解いて

(8) より $(p,q) = (3,3)$

(9) より $(p,q) = (4,3)$，$(3,4)$

(10) より $(p,q) = (5,3)$，$(3,5)$

が得られる。

解の総数が 5 個であるから，正多面体の種類も多くてこの 5 種類しか存在しないことが示された。

[*2] 展開図を切ったときの「のりしろ」が必要になるので。ぴったり 360 度では折り込めないので膨らまない。

例題 2.2.2　正多角形は 5 種類あることを確認せよ

例題 2.1.1 で正多面体には 5 種類の可能性があることが示された。つまり，証明を読めばわかるように，「正多面体があるとすれば，p，q はこのような条件を満たしていなければならない」ということであって，実際にこの (p, q) で正多面体が作れるかどうかは証明されたわけではないのである。実は問題なく 5 種類ともあるのだが，ここら辺早とちりしやすい所なので注意してもらいたい。専門用語を使えば「証明されたのは必要条件であって充分条件ではない」ということである。

5 種類の正多面体が実際に正多面体になっているかどうかは「図から明らか」ですませておく。

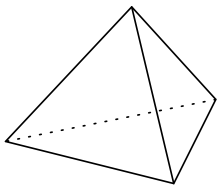

図 10　(3,3) 正四面体

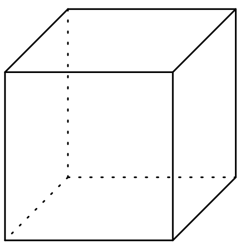

図 11　(4,3) 正六面体

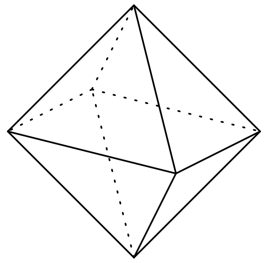

図 12　(3,4) 正八面体

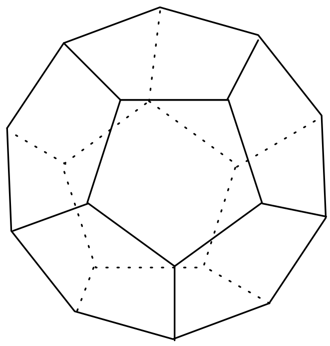

図 13　(5,3) 正十二面体

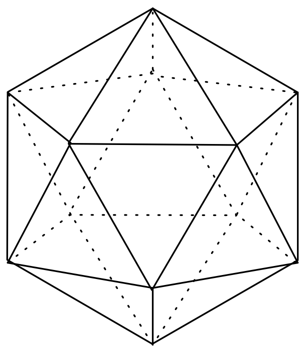

図 14　(3,5) 正二十面体

2.3　オイラーの定理

例題 2.2.2 では各々の (p, q) に対して，正 f 面体が存在することを確認した。この f が (p, q) と無関係に定まっているとは思えない。

例えば，$p = 3$，$q = 3$ から $f = 4$ が求まり，$p = 4$，$q = 3$ から $f = 6$ を求める計算式はないのであろうか。

この方法を明らかにするのが，本節の目的である。そのためにオイラーの定理をまず準備する。なお，単純多面体とは穴が開いたりしていない「普通の」「一塊(ひとかたまり)」の多面体のことである。

例題 2.3.1　**Euler の定理**
単純多面体の頂点の数を e，辺の数を k，面の数を f とすると，
$e - k + f = 2$ ……………(11)
が成り立つ。
このことを証明せよ。

この証明は難しくはないが，先を急ぐために付録 (p.**??**) にまわした。ここではいくつかの実例を調べて確認するのみにしておこう。（もちろん付録を先に読まれても結構である）

演習 9　図 10〜14 の 5 種類の正多面体, および四角錘, 三角柱について $e-k+f = 2$ を確認せよ。

例題 2.3.2　Euler の定理 (例題 2.3.1) を利用して，例題 2.2.1 を証明せよ。

正 p 角形が 1 つの頂点の周りに q 個集まって正 f 面体ができたとする。

オイラーの定理を使うため，e, k を p, q, f の式で表すことを考える。

この正 f 面体の頂点の数を e 個とする。

正 p 角形は p 個の頂点を持っている。それが f 面あるのだから，pf 個の頂点があるかというと，これでは多すぎる。1 つの頂点の周りに q 個の面が集まっているということは，同じ頂点を q 回数えていることになるからだ。したがって次の式が得られる。

$e = \dfrac{pf}{q}$ ……………………………(12)

次にこの正 f 面体の辺の数を k 本とする。

正 p 角形は辺が p 本持っている。それが f 面あるのだが，1 つの辺は必ず 2 つの面の境界になっている。つまり 1 つの辺を 2 回ずつ数えることになることに注意すると次の式が得られる。

$k = \dfrac{pf}{2}$ ……………………………(13)

この (12),(13) を Euler の定理 (11) に代入すると

$\dfrac{pf}{q} - \dfrac{pf}{2} + f = 2$ ………………(14)

$-\dfrac{pf}{2}$ を移項し, 左辺の順序を入れかえると

$f + \dfrac{pf}{q} = \dfrac{pf}{2} + 2$

両辺を pf で割ると

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{pf}$ ………………(15)

ここでこの式 (15) をよく吟味(ぎんみ)してみる。(6) と非常に似ていることに気づかれただろうか。

(6)… $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$

(15) は (6) をさらに詳しくした式なのである。すなわち，(6) では左辺が $\dfrac{1}{2}$ より大きいことはわかるが，どのくらい大きいかについては何も述べていない。それに対して (15) は左辺は $\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{2}{pf}$ だけ大きいのだということも述べている。

証明はここまでで終わりにしておく。(15) において $\dfrac{2}{pf} > 0$ であるから，(6) を導くことができ，(6) から (7) に変形できる。以下はまったく同じである。

さて，(15) は (6) より豊富な内容を持った式であることは既(すで)に述べた。不等式でなく，

等式で表せたので，本節の目的を達成する足ががりとなるのである。

しかし先に進める前にあと 2 つだけ補足しておきたい。

1 つは (15) の式で f が無限大 $(+\infty)$ になる場合についてである。f が無限大になると，$\dfrac{2}{pf}$ の分母がどんどん大きくなるから全体としてどんどん小さくなっていくらでも 0 に近づく。すると (15) は (3) と同じ式になる。これは例題 2.1.1，すなわち平面を埋めつくす場合と考えることができるのである。

もう 1 つは (15) を導く際に用いた仮定についてである。証明を注意深く読めば「正 p 角形」の「正」という条件はどこにも使用していないことに気づかれるだろう。振り返ると (6) を導くに際しては，1 つの内角を求めるために p で割り，さらにどの角も同じ大きさであるという仮定を利用して q 倍している。これはどういうことかというと，例題 2.3.2 は例題 2.2.1 よりもより少ない材料でより美味(おい)しい料理を作り上げたということである。これはオイラーの定理のおかげなのである。

さて，いよいよ本節を先に進めよう。

例題 2.3.3　f を p, q の式で表せ。

(15)… $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{pf}$

この式を f について解けばよい。

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{2}{pf}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{pf}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$
$$\frac{2}{pf}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{2}{pf}=\frac{2p+2q-pq}{2pq}$$

両辺に $\dfrac{p}{2}$ をかけると

$$\frac{1}{f}=\frac{2p+2q-pq}{4q}$$

分母分子を入れかえて

$$\boldsymbol{f=\frac{4q}{2p+2q-pq}} \quad \cdots\cdots (16)$$

これが目的の式である。

試みに $p=3, q=3$ を代入してみると，

$f=\dfrac{4\times 3}{2\times 3+2\times 3-3\times 3}=\dfrac{12}{3}=4$

$p=4, q=3$ を代入してみると

$f=\dfrac{4\times 3}{2\times 4+2\times 3-4\times 3}=\dfrac{12}{2}=6$

演習 10　残りの 3 種類も調べてみよ。

なお (16) は次のように変形することもできる。こちらの方が使いやすいかもしれない。

$$f=\frac{4q}{4-(p-2)(q-2)} \quad \cdots\cdots (17)$$

演習 11　e を p, q の式で表せ。

演習 12　k を p, q の式で表せ。

2.4　双対性

本章のいままでの結果をまとめたのが次の表である。

	p	q	f	k	e
I	3	3	4	6	4
II	4	3	6	12	8
III	3	4	8	12	6
IV	5	3	12	30	20
V	3	5	20	30	12

表 1　正多面体

この表を見ると，II と III，IV と V が非常に似通っていることに気づく。

そもそも II，III は (9) という 1 つの方程式から導かれ，IV，V は (10) から得られたものであった。これがそもそもの原因なのであろうか。実際に (9)，(10) はともに左辺が $(p-2)(q-2)$ であり，これは p と q が入れ替わっても値が変わらない[*3]。

また演習 12 より

$$k=\frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)} \quad \cdots\cdots (18)$$

(18) の右辺は p と q の対称式だから，p と q の値が入れ替わっただけでは k の値は変わらないことがわかる。つまり正六面体と正八面体の辺の数は同じ 12 本であり，正十二面体と正二十面体の辺の数はどちらも 30 本である。

演習 11 より

$$e=\frac{4p}{4-(p-2)(q-2)} \quad \cdots\cdots (19)$$

$$(17) \cdots\cdots f=\frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}$$

この 2 つの式を比べると，分子の p と q が入れ替わっただけである。つまり II と III および IV と V の面の数と頂点の数はちょうど入れ替わるわけである。

さて f と e が入れ替わっているということは，目に見える形ではどのように理解したらよいのだろうか。

例題 2.4.1　各々の正多面体の各面の中心を隣り合う面どうし結ぶとどのような立体が作られるか。ここで各面の中心とは，正 p 角形の外接円の中心をさすものとする。

この操作をすることによって，もとの面は頂点になる。またもとの頂点に対応する面が 1 つずつできるのお下の図より明らかであろう。すなわちこの操作は先の f と e を入れ替える操作に他ならない。

したがって，II からは III が，III からは II ができる。IV と V に関しても互いに入れ替わる。I からは I 自信ができる。I は自分自身と組になっていると考えることができる。

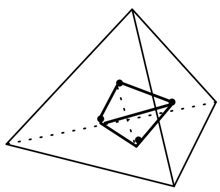

図 15　正四面体と正四面体

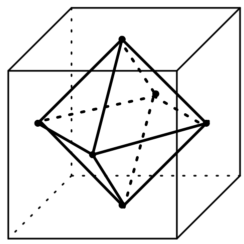

図 16　正六面体と正八面体

[*3] このことを「p，q の対称式である」という。

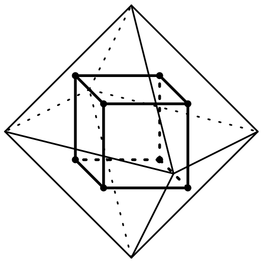

図 17　正八面体と正六面体

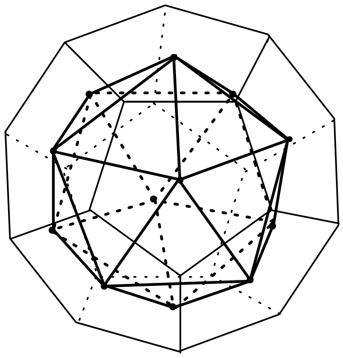

図 18　正十二面体と正二十面体

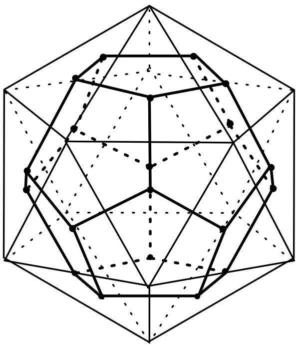

図 19　正二十面体と正十二面体

演習 13 (1)　正六面体の内側に例題 2.4.1 の手順で正八面体を作る。正六面体と正八面体の体積比を求めよ。

(2)　同様に正四面体の中に正四面体を作る。2 つの体積比を求めよ。

(3)　正六面体の中に正八面体を作り，さらにその内側に正六面体を作る。2 つの正六面体の体積比を求めよ。

(4)　正八面体の中に正六面体を作り，さらにその内側に正八面体を作る。2 つの正八面体の体積比を求めよ。

演習 14　同一半径の急に内接する正十二面体と正二十面体がある。体積はどちらが大きいか。