3　正多面体の表面積・体積

いよいよこの小冊子のメインの章である。5 種類の正多面体について，表面積および体積の公式を作る。

3.1　正四面体

例題 3.1.1　1 辺 a の正四面体の表面積 S_a を求めよ。

例題 1.1.2 より 1 辺 a の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，したがって

$$S_a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 4 = \boldsymbol{\sqrt{3}a^2}$$

例題 3.1.2　1 辺 a の正四面体の体積 V_a を求めよ。

1 辺 1 の V_1 を計算する。

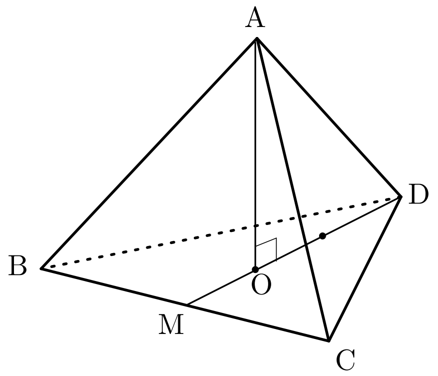

図 20　正四面体の体積

$\triangle$BCD$=\frac{\sqrt{3}}{4}$ であるから，あとは高さ AO が求まればよい。

AO を求めるために$\triangle$AOD で三平方の定理を用いる。そのためには OD の長さを求めておかなければならない。

O は$\triangle$BCD の重心であるから

$\mathrm{OD} = \frac{2}{3}\mathrm{MD} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

これで準備は完了。あとは計算するだけである。

$\triangle$AOD に三平方の定理を適用して

$$\mathrm{AO} = \sqrt{\mathrm{AD}^2 - \mathrm{OD}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

これで体積を求める準備はすべて完了。

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{BCD} \times \mathrm{AO} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

したがって　$V_a = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}$

3.2　正六面体

この節は図も不要であろう。

例題 3.2.1　1 辺 a の正六面体の表面積 S_a を求めよ。

$S_a = a^2 \times 6 = \boldsymbol{6a^2}$

例題 3.2.2　1 辺 a の正六面体の体積 V_a を求めよ。

$V_a = \boldsymbol{a^3}$

3.3　正八面体

例題 3.3.1　1 辺 a の正八面体の表面積 S_a を求めよ。

$S_a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 8 = \boldsymbol{2\sqrt{3}a^2}$

例題 3.3.2　1 辺 a の正八面体の体積 V_a を求めよ。

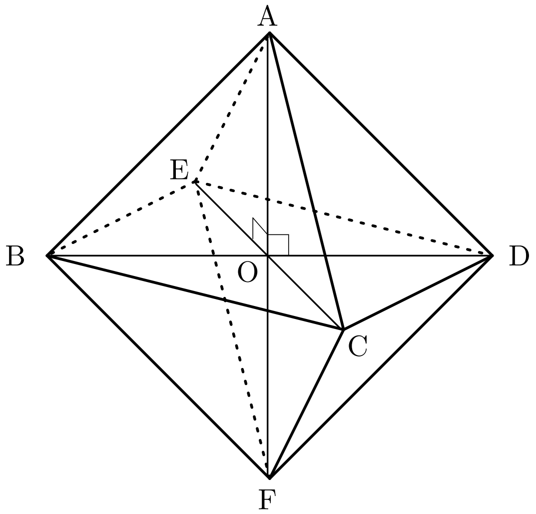

図 21　正八面体の体積

1 辺 1 の体積 V_1 を求める。

正八面体は 3 つの正方形が互いに直交して作られる構造だということを理解していると簡単である。図でいえば，四角形 ABFD，四角形 BCDE，四角形 AEFC が正方形である。

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \text{A–BCDE} + \text{F–BCDE} \\
&= \frac{1}{3} \times 1^2 \times \text{AO} + \frac{1}{3} \times 1^2 \times \text{OF} \\
&= \frac{1}{3} \times (\text{AO} + \text{OF}) \\
&= \frac{1}{3} \times \text{AF} \\
&= \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \qquad (\because \text{AF は正方形の対角線}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

$$\therefore V_a = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3} a^3}$$

上の計算も $\text{AO} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と急いで数値を代入しないことで，簡単にしている。

慣れると次のような計算も可能になる。

$\text{AF} = \text{BD} = \text{CE} = \sqrt{2}$ なので，

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

演習 15　各辺の長さが 6 cm である正四角錐 O–ABCD がある。図 22 のようにこの正四角錐を辺 AB を通る平面で切り，台形 PQAB を作ったとする。

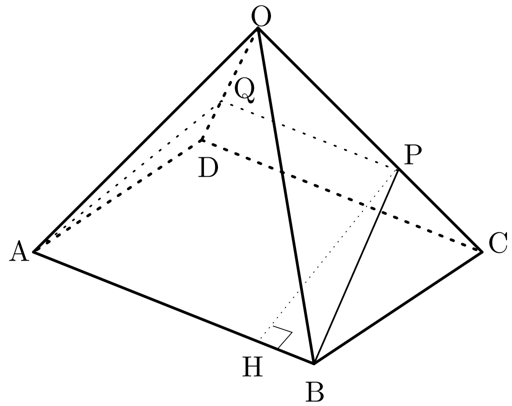

図 22

$\text{OP} = 2\,\text{cm}$ のとき, 次の問いに答えよ。

(1)　台形 PQAB の高さ PH の長さを求めよ。

(2)　台形 PQAB の面積 S を求めよ。

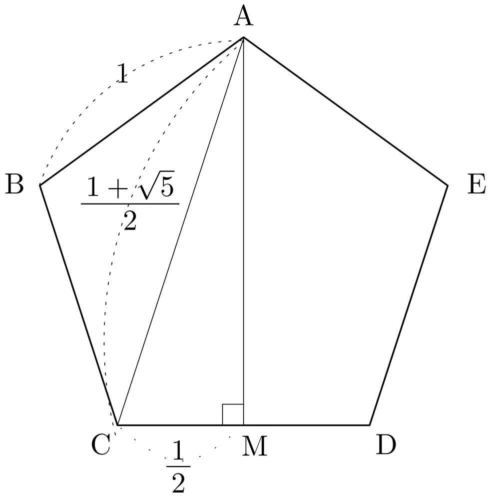

図 23

3.4　正十二面体

例題 3.4.1　1 辺 a の正十二面体の表面積 S_a を求めよ。

1 辺 1 の S_1 を求める。

例題 1.1.3 で図 23 までは調べてある。

ここで A の高さ AM を求めておこう。どうせ，この先必要になりそうである。

三平方の定理より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AM}^2 &= \mathrm{AC}^2 - \mathrm{CM}^2 \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1+2\sqrt{5}+5-1}{4} \\
&= \frac{5+2\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}
$$

したがって $\mathrm{AM} = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$

さて，S_1 を求める方針であるが，っこから相似と面積比の関係を駆使しても求めることができそうだ。が，ここでは無骨に正面から突破する方法をとることにしよう。一般の正 n 角形の面積を求める必要が出てきたときに応用できそうな方法だからだ。

図 24 のように 5 つの三角形に分割するのである。OM を求めることができれば，正五角形の面積も求められることがわかる。

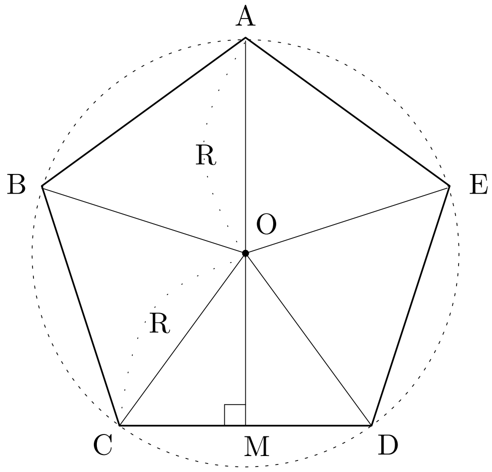

図 24

OM を求めるには外接円の半径 R がわかればよい。そこでまずは R を求めることから計算は始まる。

△OCM において三平方の定理より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OM} &= \sqrt{\mathrm{OC}^2 - \mathrm{CM}^2} \\
&= \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

ここで $\mathrm{AO} + OM = \mathrm{AM}$ であるから

$$R + \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$$

R を右辺に移項して

$$\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} - R$$

両辺各々 2 乗すると

$$R^2 - \frac{1}{4} = \frac{5+2\sqrt{5}}{4} - \sqrt{5+2\sqrt{5}}R + R^2$$

R について解くと

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5+2\sqrt{5}}R &= \frac{5+2\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\
R &= \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}
\end{aligned}
$$

この R の分母の有理化はしんどそうである。しかし，考えてみると計算に必要なのは R ではなく R^2 である。あわてることはない。

$$
\begin{aligned}
R^2 &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)^2 \\
&= \frac{14+6\sqrt{5}}{4(5+2\sqrt{5})} \\
&= \frac{7+3\sqrt{5}}{2(5+2\sqrt{5})} \\
&= \frac{(7+3\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{2(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} \\
&= \frac{35-30+15\sqrt{5}-14\sqrt{5}}{2(25-20)} \\
&= \frac{5+\sqrt{5}}{10}
\end{aligned}
$$

これで OM が計算できる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OM} &= \sqrt{R^2-\frac{1}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}-\frac{1}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{50+10\sqrt{5}}{100}-\frac{25}{100}} \\
&= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}
\end{aligned}
$$

これで正五角形の面積が計算できる。ゴールはもうすぐそこである。

1 辺 1 の正五角形の面積

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}\times 5 \\
&= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore S_1 &= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\times 12 \\
&= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

$$S_a = \mathbf{3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2}$$

例題 3.4.2　1 辺 a の正十二面体の体積 V_a を求めよ。

1 辺 1 の V_1 を求める。図 25 のように分割して立方体と 6 つの屋根形にわける。まずは屋根形の体積 V_y を求める。

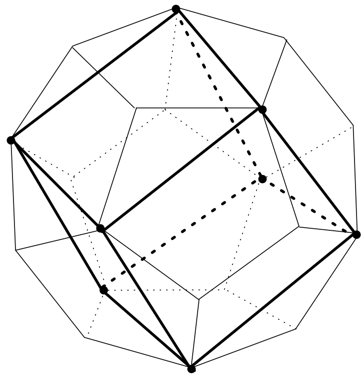

図 25

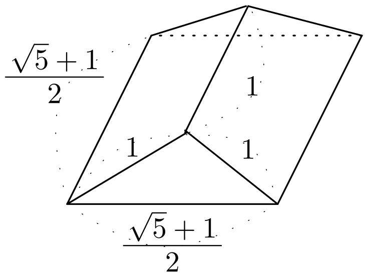

図 26　屋根形

これはさらに分割して $V_{y_1}+V_{y_2}$ として計算する。図 27 を見ればわかるように，ともに高さ h がわかればよい。

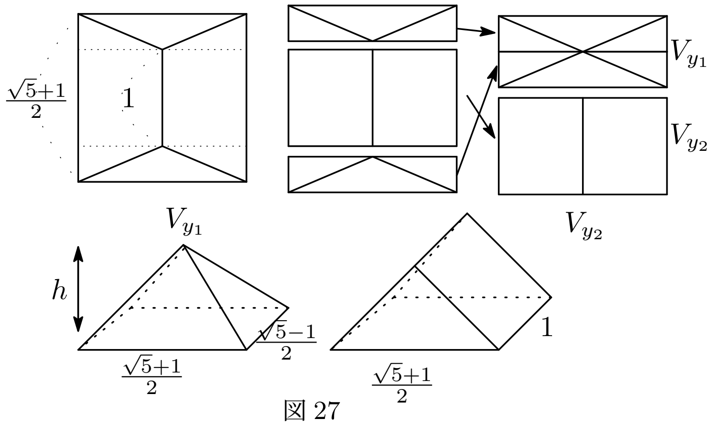

図 27

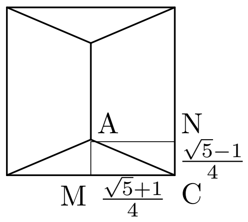

図 28

$AC^2 = CM^2 + CN^2 + h^2$ であるから,

$$\begin{aligned}
h^2 &= AC^2 - CM^2 - CN^2 \\
&= 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} \\
&= 1 - \frac{12}{16} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\therefore h = \frac{1}{2}$$

これで V_y が求められる。

$$\begin{aligned}
V_y &= V_{y_1} + V_{y_2} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \\
&= \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{5}+1}{8} \\
&= \frac{7+3\sqrt{5}}{24}
\end{aligned}$$

続いて立方体の体積 V_c を求める。

$$\begin{aligned}
V_c &= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 \\
&= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \\
&= \frac{8+4\sqrt{5}}{4} \\
&= 2 + \sqrt{5}
\end{aligned}$$

これでやっと解決した。

$$\begin{aligned}
V_1 &= V_y \times 6 + V_c \\
&= \frac{7+3\sqrt{5}}{24} \times 6 + (2+\sqrt{5}) \\
&= \frac{7+3\sqrt{5}}{4} + \frac{8+4\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{15+7\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

$$\therefore V_a = \boldsymbol{\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3}$$

3.5　正二十面体

> **例題** 3.5.1　1 辺 a の正二十面体の表面積 S_a を求めよ。

$$\begin{aligned}
S_a &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 20 \\
&= \boldsymbol{5\sqrt{3}a^2}
\end{aligned}$$

> **例題** 3.5.2　1 辺 a の正二十面体の体積 V_a を求めよ。

1 辺 1 の V_1 を求める。

方針は，正二十面体の外接球の中心 O から各面までの距離 h を求め，20 個の正三角錐の体積の和として求めようというものである。

h を求めるために図 29 のような断面図中の平行四辺形 ANBM を考える。M，N は各々の辺の中点である。

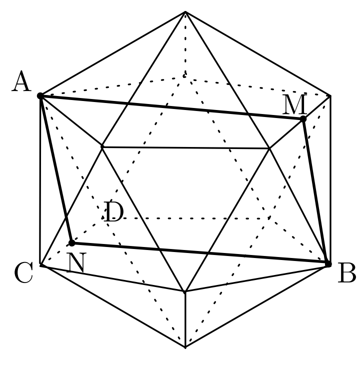

図 29

ANBM が平行四辺形になるのは明らかとしておく。

AB と MN の交点が外接球の中心 O とな

る。また AN の三等分点を F，G とすると，G は△ACD の重心，正三角形であるからすなわち外心である。したがって，OG が求める h である。

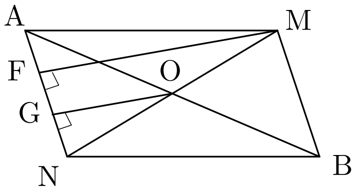

図 30

また，NO = OM であるから，OG // MF となり，∠AFM = 90°も明らかである。

以上で準備は終わり，いよいよ計算に入る。$\mathrm{AN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，

$\mathrm{AF}=\dfrac{1}{3}\times\mathrm{AN}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

ここで AM は例題 3.4.1 の AM と同一であるから，$\mathrm{AM}^2=\dfrac{5+2\sqrt{5}}{4}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MF}^2 &= \mathrm{AM}^2-\mathrm{AF}^2\\
&= \frac{5+2\sqrt{5}}{4}-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\\
&= \frac{5+2\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{12}\\
&= \frac{14+6\sqrt{5}}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \mathrm{MF} &= \sqrt{\frac{14++6\sqrt{5}}{12}}\\
&= \frac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

この分子の二重根号は開くことができる。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{14+6\sqrt{5}} &= \sqrt{9+6\sqrt{5}+5}\\
&= \sqrt{3^2+2\times3\times\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}\\
&= \sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}\\
&= 3+\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

したがって，$\mathrm{MF}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

$h=\mathrm{OG}=\dfrac{\mathrm{MF}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$

以上により

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 20\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\\
&= \frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore V_a=\boldsymbol{\frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}a^3}
$$

これでこの小冊子の当初の目的は達成された。